27/02/2025

Ortogonalizzazione simultanea di prodotti scalari

Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia φ un prodotto scalare su V definito positivo, e sia ψ un prodotto scalare su V.
Allora, esiste una base di V ortonormale per φ e ortogonale per ψ.

Dimostrazione: Dall'algoritmo di Gram-Schmidt, sappiamo che esiste una base ortonormale per φ; sia S una tale base. Allora, detta $A = M_S(\psi)$, A è simmetrica; in particolare, esiste un endomorfismo φ-autoaggiunto di V, f, tale che $A = M_S(f)$. Per la forma matriciale del teorema spettrale, A si coniuga ortogonalmente in una matrice diagonale; ossia, esiste una base $\mathcal{B}$ φ-ortonormale di autovettori per f. Da questo segue che $M_{\mathcal{B}}(f) = D$ diagonale.
Detta $M = M_S^{\mathcal{B}}(id)$, dato che sia $\mathcal{B}$ che S sono ortonormali, $M \in O(n)$, e $M^{-1}AM = D = M^tAM$. Osservando che $M_{\mathcal{B}}(\psi) = M^tAM = D$, segue che $\mathcal{B}$ è una base ortogonale per ψ.

Decomposizione polare

Sia $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Allora, esistono uniche $S \in S(n,\mathbb{R})$, $P \in O(n)$ tali che $A = SP$.

Dimostrazione: Esistenza: AA^t è simmetrica e definita positiva. Infatti, $X^t(AA^t)X = (A^tX)^t(A^tX) > 0$, dato che se A è invertibile, anche A^t lo è.
Equivalentemente, è definita positiva perché $AA^t = AIA^t$, cioè è congruente all'identità.
Per l'esistenza e unicità della radice quadrata, esiste $S \in S(n,\mathbb{R})$ definita positiva tale che $S^2 = AA^t$. Dunque, $S^{-1}AA^tS^{-1} = I \Rightarrow S^{-1}A(S^{-1}A)^t = I$.
Posta $P = S^{-1}A$, $P \in O(n)$. Inoltre, $A = S(S^{-1}A) = SP$, da cui la tesi.
Unicità: Segue dall'unicità della radice quadrata, dato che P è costruita da S.

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $f \in End(V)$. Siano W_1, W_2 f-invarianti e tali che $V = W_1 + W_2$. È vero che se $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ hanno autovalori reali, allora f ha autovalori reali?

<u>Soluzione</u> Sì, è vero. Dimostriamolo. Consideriamo una base $\mathcal{B}$ di $W_1 \cap W_2$, ed estendiamola ad una base di $W_1 + W_2$ mettendoci due insiemi di vettori $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ t.c. $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1$ sia base di W_1, e similmente per W_2. In particolare, $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base. Essendo W_1 e W_2 f-invarianti, anche $W_1 \cap W_2$ lo è; pertanto, la matrice di f in $\mathcal{B}'$ è della forma

$$\underset{M}{\underset{\shortparallel}{M_{\mathcal{B}'}(f)}} = \left(\begin{array}{c|c|c} A & * & * \\ \hline & B & \\ \hline & & C \end{array}\right)$$

Il polinomio caratteristico di M è dato da $p_M(t) = p_A(t)p_B(t)p_C(t)$. Mostriamo che le radici sono tutte reali. Le matrici associate a $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ rispetto alle basi $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_2$ sono della forma $\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline & B \end{array}\right)$ e $\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline & C \end{array}\right)$ rispettivamente, e i loro polinomi caratteristici sono rispettivamente $p_A(t)p_B(t)$, e $p_A(t)p_C(t)$. Questi hanno radici reali per ipotesi, e dunque i singoli fattori $p_A(t)$, $p_B(t)$ e $p_C(t)$ hanno radici reali. Segue che anche il loro prodotto, $p_M(t)$, ha radici reali.

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Trovare $P \in GL(5, \mathbb{R})$ che diagonalizza A.

b) Mostrare che $X \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}XP \in C(P^{-1}AP)$.

c) Calcolare $\dim(C(A))$.

d) Trovare $B \in M(5, \mathbb{R})$ diagonalizzabile, non simultaneamente ad A. Esibire un sottospazio di A non B-invariante.

Ricordiamo che il centralizzatore di una matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ è
$C(A) = \{ B \in M(n, \mathbb{R}) \mid AB = BA \}$.

<u>Soluzione</u> a) A è triangolare a blocchi. Il blocco $\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$ ha autovalori -1 e 3, con molteplicità algebrica 3 e 1.

Il secondo blocco sulla diagonale è (3), dunque $\mathrm{Sp}\,A = \{-1, 3\}$, con $\begin{cases} m_A(-1) = 3 \\ m_A(3) = 2 \end{cases}$. Risolvendo due semplici sistemi lineari, si trova che $\begin{cases} m_G(-1) = 3 \\ m_G(3) = 2 \end{cases}$, e che $\begin{cases} V_{-1} = \mathrm{span}(-e_1+e_2, -e_1+e_3, -e_1+e_4) \\ V_3 = \mathrm{span}(-e_1+e_5, e_1+e_2+e_3+e_4) \end{cases}$.

Allora, la matrice che diagonalizza A è $P = \begin{pmatrix} -1&-1&-1&-1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

b) $AX = XA \iff AX - XA = 0 \iff P^{-1}(AX - XA)P = 0 \iff$

$\iff P^{-1}AXP - P^{-1}XAP = 0 \iff P^{-1}APP^{-1}XP - P^{-1}XPP^{-1}AP = 0 \iff$

$\iff (P^{-1}AP)(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)(P^{-1}AP)$.

c) Dal punto precedente, sappiamo che la condizione di commutatività con A può essere controllata direttamente nella base di autovettori per A.
Dato che ci interessa soltanto la dimensione, e dato che il coniugio per P è un isomorfismo, troviamo $C(P^{-1}AP)$. Prendiamo una matrice di incognite $X = (x_{ij})$, e scriviamo $AX = XA$ esplicitamente. Si trova che una X valida deve essere della forma $X = \begin{pmatrix} *&*&*&0&0\\ *&*&*&0&0\\ *&*&*&0&0\\ 0&0&0&*&*\\ 0&0&0&*&* \end{pmatrix}$, da cui $\dim(C(A)) = 13$.

d) $B = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, non commuta con A, e l'autospazio $V_3(A) = \mathrm{span}(-e_1+e_5, e_1+e_2+e_3+e_4+e_5)$ ha come immagine $\mathrm{span}(-e_1+e_5, e_1+2e_2+e_3+2e_4) \not\subseteq V_3(A)$.

Sia $V = M(2,\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare $\varphi(X,Y) = tr(X^tY)$.

Sia $f \in End(V)$ definito da $f(X) = X - X^t$.

a) f è φ-autoaggiunto?

b) f è una φ-isometria?

c) Scrivere la matrice di f rispetto ad una base φ-ortonormale di V, e confrontare il risultato con le risposte date.

Soluzione a) Osserviamo che $\varphi(f(X),Y) = \varphi(X - X^t, Y) =$

$= \varphi(X,Y) - \varphi(X^t,Y) = tr(X^tY) - tr(XY)$;

$\varphi(X, f(Y)) = \varphi(X, Y - Y^t) = \varphi(X,Y) - \varphi(X,Y^t) = tr(X^tY) - tr(X^tY^t)$.

Dato che $X^tY^t = (YX)^t$, $tr(A^t) = tr A$, e $tr(AB) = tr(BA)$,

$tr(X^tY^t) = tr((YX)^t) = tr(YX) = tr(XY)$. Allora, $\varphi(f(X),Y) = \varphi(X, f(Y))$, cioè f è φ-autoaggiunto.

b) Un'isometria è invertibile, e $Ker f = S(2,\mathbb{R}) \neq \{0\}$, quindi f non è un'isometria.

c) Considero la base $\mathcal{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$; è facile vedere che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale. Gli ultimi tre vettori sono una base di $S(2,\mathbb{R}) = Ker f$, e $f(E_{12} - E_{21}) = (E_{12} - E_{21}) - (E_{12} - E_{21})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2(E_{12} - E_{21})$. Allora, $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{M_{\mathcal{B}}(f)}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che A è simmetrica ($\Leftrightarrow f$ è autoaggiunto) e che non è un'isometria, coerentemente con quanto detto prima.