26/02/2025

Forma canonica delle isometrie Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e sia φ un prodotto scalare definito positivo su V. Data una φ-isometria f, esiste una base $\mathcal{B}$ tale che
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_k & & & & \\ & -I_h & & & \\ & & R_{\vartheta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\vartheta_s} \end{pmatrix},$$
dove
$$R_{\vartheta_j} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_j & -\sin\vartheta_j \\ \sin\vartheta_j & \cos\vartheta_j \end{pmatrix}, \text{ e } n = k+h+2s.$$

Equivalentemente, data $A \in O(n)$, esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ ha la forma di cui sopra.

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che gli autovalori di A sono tutti numeri complessi di norma 1.
Infatti, $\varphi_{\mathbb{C}}(v,v) = \varphi_{\mathbb{C}}(Av,Av) = \varphi_{\mathbb{C}}(\lambda v, \lambda v) = \lambda\bar{\lambda}\,\varphi_{\mathbb{C}}(v,v)$.
Dato che $\varphi_{\mathbb{C}}(v,v) \neq 0$, $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. In particolare, gli unici autovalori reali sono 1 e -1.
Inoltre, gli autospazi complessi relativi ad autovalori distinti di A sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$, $\varphi_{\mathbb{C}}$. Infatti, dati $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, e due rispettivi autovettori $v, w \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_{\mathbb{C}}(v,w) = \varphi_{\mathbb{C}}(Av, Aw) = \varphi_{\mathbb{C}}(\lambda v, \mu w) =$
$= \lambda\bar{\mu}\,\varphi_{\mathbb{C}}(v,w)$. Osserviamo che $\lambda\bar{\mu} \neq 1$, dato che $\bar{\mu} = \mu^{-1}$ (ha norma 1!), e $\lambda\bar{\mu} = 1 \Leftrightarrow \lambda/\mu = 1 \Leftrightarrow \lambda = \mu$. Segue che $\varphi_{\mathbb{C}}(v,w) = 0$.

Siano ora V_1 e V_{-1} gli autospazi relativi a 1 e -1; dato che $\varphi_{\mathbb{C}}(v,w) = \varphi_{\mathbb{R}}(v,w)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, V_1 e V_{-1} sono ortogonali. Allora, posto $W = (V_1 \oplus V_{-1})^{\perp}$, abbiamo la decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^n = V_1 \perp V_{-1} \perp W$. Osserviamo anche che i pezzi sono A-invarianti. Date basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_W$ ortonormali, e detta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1} \cup \mathcal{B}_W$, questa è una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$, e coniugando per il cambio di base, A assume la forma
$$A' = \begin{pmatrix} I_k & & \\ & -I_h & \\ & & B \end{pmatrix}, \quad \text{dove } \begin{cases} k = \dim V_1 \\ h = \dim V_{-1} \end{cases}.$$

Anche A' è ortogonale ($O(n)$ è chiuso per prodotto), e lo è anche B, dato che
$$A'A'^t = \begin{pmatrix} I_k & & \\ & I_h & \\ & & BB^t \end{pmatrix} = I.$$

Inoltre, B non ha autovalori reali, quindi è di taglia pari. Resta dunque da dimostrare che, data $B \in O(2m)$ senza autovalori reali, B si coniuga ortogonalmente in una matrice diagonale a blocchi di rotazione. Mostriamolo per induzione su m. Se $m=1$, sappiamo che le isometrie di $\mathbb{R}^2$ senza autovalori reali sono della forma voluta. Sia dunque $m>1$, e supponiamo che la tesi sia vera per $m-1$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di B, e sia $v \in \mathbb{C}^{2m}$ un suo autovettore. Dato che B ha entrate reali, $B = \bar{B}$, e dunque $Bv = \bar{B}\bar{v} = \overline{Bv} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Allora, $\bar{\lambda}$ è un autovalore per B, e $\bar{v}$ un autovettore per esso. In particolare, v e $\bar{v}$ sono ortogonali, dunque indipendenti su $\mathbb{C}$. Detti $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$ i due vettori tali che $v = x + iy$, anche questi sono indipendenti su $\mathbb{R}$.

Possiamo dire di più: x e y sono ortogonali, e hanno stessa norma. Infatti,

$$0 = \varphi_{\mathbb{C}}(v, \bar{v}) = \varphi_{\mathbb{C}}(x+iy, x-iy) = \varphi_{\mathbb{C}}(x,x) + \varphi_{\mathbb{C}}(x,-iy) + \varphi_{\mathbb{C}}(iy, x) + \varphi_{\mathbb{C}}(iy,-iy) =$$

$$= \varphi_{\mathbb{C}}(x,x) - \varphi_{\mathbb{C}}(y,y) + i\left(\varphi_{\mathbb{C}}(x,y) + \varphi_{\mathbb{C}}(y,x)\right) = \varphi_{\mathbb{R}}(x,x) - \varphi_{\mathbb{R}}(y,y) + 2i\,\varphi_{\mathbb{R}}(x,y).$$

Ponendo uguali a 0 parte reale e parte immaginaria, segue quello che volevamo. Sia $\lambda = \alpha + i\beta$, con α, β reali. Dato che $|\lambda| = 1$, α e β si realizzano rispettivamente come coseno e seno di un certo angolo θ. In particolare, θ non è un multiplo intero di π.

Dato che $Bv = \lambda v$, $Bx + iBy = B(x+iy) = (\alpha + i\beta)(x+iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$. Uguagliando parte reale e immaginaria, troviamo che $\begin{cases} Bx = \alpha x - \beta y \\ By = \beta x + \alpha y \end{cases}$.

Dato che $\|x\| = \|y\|$, segue che $\begin{cases} B\frac{x}{\|x\|} = \alpha\frac{x}{\|x\|} - \beta\frac{y}{\|y\|} \\ B\frac{y}{\|y\|} = \beta\frac{x}{\|x\|} + \alpha\frac{y}{\|y\|} \end{cases}$. Detto $W_1 = \mathrm{span}(x,y)$,

$\mathbb{R}^{2m} = W_1 \perp W_1^{\perp}$, e i pezzi sono B-invarianti. Allora, rispetto alla base $\{y/\|y\|, x/\|x\|, \mathcal{B}_{W_1^\perp}\}$, B si scrive come $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -\beta & \\ \beta & \alpha & \\ \hline & & B' \end{array}\right)$, con B' ortogonale senza autov. reali.

Per ipotesi induttiva, B' si coniuga nella forma voluta, e dunque anche B. Segue la tesi.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Trovare un sottospazio $U \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 A-invariante.

b) Trovare un sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\mathbb{R}^4 = V \oplus A(V)$.

c) Mostrare che dato $W \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2, allora vale a) o b).

Soluzione a) Osserviamo che $\begin{cases} Ae_1 = e_1 - e_2 \in \text{span}(e_1, e_2) \\ Ae_2 = 2e_1 - e_2 \in \text{span}(e_1, e_2) \end{cases}$, . $U = \text{span}(e_1, e_2)$ è A-invariante.

b) Dato che siamo in $\mathbb{R}^4$, e V ha dimensione 2, basta trovarne uno che intersechi banalmente la propria immagine.
Osserviamo che $Ae_3 = e_2 - e_3 + e_4$, $Ae_4 = -2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4$.
Posto $V = \text{span}(e_3, e_4)$, $A(V) = \text{span}(e_2 - e_3 + e_4, -2e_1 + 2e_2 - 2e_3 + e_4)$.
Osservando che $V + A(V)$ ha dimensione 4, dalla formula di Grassmann segue che $\mathbb{R}^4 = V \oplus A(V)$.
c) Sia $W \subseteq \mathbb{R}^4$ di dimensione 2. Se W è A-invariante, abbiamo finito.
Se non lo è, mostriamo che W e $A(W)$ si intersecano banalmente.
Se non si intersecassero banalmente, $A(W) \cap W$ avrebbe dimensione 1, e dunque $W + A(W)$ avrebbe dimensione 3. $A^2 = -I$, e dunque $A(A(W)) \subseteq W$, da cui $A(A(W) + W) \subseteq A(W) + W$, cioè $A(W) + W$ è A-invariante.
Avendo dimensione 3, il polinomio caratteristico di $A|_{A(W)+W}$ ha grado 3, e dunque ammette una radice reale, cioè un autovalore per A, assurdo.

Siano A e B due matrici quadrate. Calcolare μ_N, dove $N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, in funzione di μ_A e μ_B.

Soluzione Mostriamo che $\mu_N = \text{mcm}(\mu_A, \mu_B)$. Osserviamo innanzitutto che se $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, $p(N) = \left(\begin{array}{c|c} p(A) & 0 \\ \hline 0 & p(B) \end{array}\right)$. Dato che $\mu_N(N) = 0$, deve valere $\left(\begin{array}{c|c} \mu_N(A) & 0 \\ \hline 0 & \mu_N(B) \end{array}\right) = 0$, da cui $\begin{cases} \mu_N(A) = 0 \\ \mu_N(B) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_A \mid \mu_N \\ \mu_B \mid \mu_N \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{mcm}(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_N$.

Viceversa, ogni polinomio che si annulla in A e B si annulla su N; questo vale in particolare per $\text{mcm}(\mu_A, \mu_B)$. Allora, $\mu_N \mid \text{mcm}(\mu_A, \mu_B)$.

Mettiamo questo piccolo risultato in pratica:
Calcolare il polinomio minimo delle matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Soluzione</u> A è diagonale a blocchi; detti $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = (0)$, i loro polinomi minimi sono $\mu_{A_1} = t^2$, $\mu_{A_2} = t$ (semplice verifica). Allora, $\mu_A = \text{mcm}(t^2, t) = t^2$.

Per quanto riguarda B, un ragionamento analogo mostra che $\mu_B = t^2 - t$.

$A \in M(n, \mathbb{C})$, $A^3 = I$. | a) Trovare i possibili autovalori di A.
b) È vero che A dev'essere diagonalizzabile?

<u>Soluzione</u> a) $A^3 = I \iff A^3 - I = \underline{0} \iff \mu_A \mid t^3 - 1 = (t-1)(t-\varsigma_3)(t-\varsigma_3^2)$, con $\varsigma_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque, i possibili autovalori sono 1, ς_3 e ς_3^2.

b) Sì. Per un noto risultato, A è diagonalizzabile se e solo se μ_A si fattorizza in fattori lineari di molteplicità 1.
