ESERCIZI TUTORATO 30/01/2025

$\boxed{1}$

a) La bilinearità di φ è una semplice verifica, segue dalla linearità della traccia e della trasposta.

Inoltre, $\varphi(A,B) = tr(A^tB) = tr((A^tB)^t) = tr(B^tA) = \varphi(B,A)$.

Mostriamo che φ è definito positivo.

$$\varphi(A,A) = tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{n} [A^tA]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} [A^t]_{ji} [A]_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} [A]_{ij}^2 .$$

Segue che $\varphi(A,A) \geq 0 \ \forall A$, e che $\varphi(A,A) = 0$ implica che tutte le entrate di A siano nulle, da cui $A = 0$.

b) Sappiamo (se non lo sapete, provate a dimostrarlo!) che $M(n,\mathbb{R}) = S(n,\mathbb{R}) \oplus A(n,\mathbb{R})$. Mostriamo che la somma è ortogonale.

Siano $S \in S(n,\mathbb{R})$, $A \in A(n,\mathbb{R})$. Allora, $\varphi(A,S) = tr(A^tS) = tr(-AS) =$
$= tr(-AS^t) = -tr(AS^t) = -tr(S^tA) = -\varphi(S,A) = -\varphi(A,S)$.

Segue che $\varphi(A,S) = 0$, come voluto.

$\boxed{2}$

$\Rightarrow$: Sia $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ una base φ-ortogonale di V. Allora, $\varphi(v_0, v_i) = 0$ $\forall i \neq 0$. Inoltre, $\varphi(v_0, v_0) = 0$, da cui $v_0 \in V^\perp$ per linearità del prodotto scalare.

$\Leftarrow$: Sia U tale che $V = span(v_0) \oplus U$. Sia $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base di V, ortogonale rispetto a $\varphi_{|U}$. Dato che v_0 è ortogonale a tutto V, in particolare è ortogonale ai vettori di U, quindi $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ è una base φ-ortogonale di V.

[3]

a) Sappiamo che $\mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Ker}\, M_e(\varphi)$ (mostratelo!). $A := M_e(\varphi)$

Facendo mosse di Gauss, troviamo che $\mathrm{rk}(A) = 4$, e che $2A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(3)} = \underline{0}$, da cui $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{span}(2e_1 - e_2 - e_3)$.

b) Sappiamo che $i_0(\varphi) = 1$, da cui segue che $i_+(\varphi) + i_-(\varphi) = 4$.

Osserviamo che $\varphi|_{\mathrm{span}(e_2, e_3)}$ è definito positivo, e che $\varphi|_{\mathrm{span}(e_4, e_5)}$ è definito negativo. Segue che $\sigma(\varphi) = (2, 2, 1)$.

c) Prendiamo una base di Sylvester per φ, $\mathcal{B} = \{2e_1 - e_2 - e_3, e_2, \frac{e_3 + e_5}{\sqrt{2}}, e_4, e_5\}$.

Qui, φ si rappresenta con la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

È facile convincersi che la massima dimensione di un sottospazio totalmente isotropo è $i_0 + \min(i_+, i_-) = 3$.

Un tale sottospazio è $W = \mathrm{span}(2e_1 - e_2 - e_3, e_2 + e_4, e_3 + (1 - \sqrt{2})e_5)$.

---

[4]

Scriviamo innanzitutto una base di W, $W = \mathrm{span}(e_1 - e_2, e_1 - e_3)$.

Dato che $\varphi(e_1, e_1) = 0$ da richiesta, basta scegliere quale dei due vettori della base di W sarà quello "positivo". Scegliamo per esempio $e_1 - e_2$.

Allora, dovrà valere $\varphi(e_1 - e_3, e_1 - e_3) < 0$. Dato che $\varphi(e_1 - e_3, e_1 - e_3) =$
$= \varphi(e_1, e_1) - 2\varphi(e_1, e_3) + \varphi(e_3, e_3) = \varphi(e_3, e_3) - 2\varphi(e_1, e_3)$.

Poniamo $\varphi(e_3, e_3) = 1$, $\varphi(e_1, e_3) = 1$. Poniamo anche $\varphi(e_1, e_1) = 1$, $\varphi(e_2, e_2) = 3$.

La matrice di φ avrà dunque la forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$. Dato che $\sigma(\varphi)$ dovrà essere $(2, 1, 0)$, basta trovare due vettori indipendenti positivi.

Mettendo a 0 le due entrate libere, troviamo $M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Osserviamo anche che $\{e_2, e_1 - e_2, e_1 - e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e che $\begin{cases} \varphi_{|span(e_2, e_1 - e_2)} \text{ è definito positivo} \\ \varphi_{|span(e_1 - e_3)} \text{ è definito negativo.} \end{cases}$ Allora, la matrice trovata funziona.

$\boxed{5}$

Dagli assiomi di determinante, possiamo dedurre che data una matrice A, le mosse di Gauss del terzo tipo (combinazione lineare di colonne o righe) non cambiano il determinante.

Infatti, per multilinearità si ha $\det(A_1 | \_ | A_i + \lambda A_j | \_ | A_n) = \det A +$
$+ \lambda \det(A_1 | \_ | A_j | \_ | A_j | \_ | A_n)$; questo secondo addendo è nullo, dato che il determinante è alternante.

Sappiamo anche che per una matrice triangolare T, vale $\det T = \prod_{i=1}^{n} T_{ii}$.

Riduciamo dunque A a scala usando mosse di Gauss.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^{(3)} - A^{(5)} \\ A^{(4)} - A^{(5)}}]{\substack{A^{(1)} - A^{(5)} \\ A^{(2)} - A^{(5)}}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A(3) - \frac{2}{3} A(2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Allora, $\det A = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 120$.