Esercizi di Algebra Lineare, corso A

Enrico Berni

30/01/2025

Provate a svolgere i seguenti esercizi in maniera autonoma, eventualmente confrontandovi con dei compagni. Le soluzioni saranno discusse durante il tutorato di giovedì 30 gennaio.

1. Sia $\mathfrak{M}(m, n, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici di taglia $m \times n$ a coefficienti reali. Sia φ l'applicazione

$$\varphi : \mathfrak{M}(m, n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{M}(m, n, \mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = \operatorname{tr}(A^t B).$$

   (a) Mostrare che φ è un prodotto scalare definito positivo.

   (b) Nel caso $m = n$, determinare l'ortogonale del sottospazio $S(n, \mathbb{R})$ delle matrici simmetriche.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Sia φ un prodotto scalare su V, e sia v_0 un vettore tale che $\varphi(v_0, v_0) = 0$. Mostrare che $\{v_0\}$ si estende a una base ortogonale di V se e solo se $\operatorname{span}(v_0)^\perp = V$.

3. Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^5$ rappresentato nella base canonica dalla matrice

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Trovare una base di $\operatorname{Rad}(\varphi)$.

   (b) Calcolare la segnatura di φ, $\sigma(\varphi)$.

   (c) Determinare un sottospazio totalmente isotropo di dimensione massima.

4. Determinare una matrice $A \in \mathfrak{M}(3, \mathbb{R})$ che rappresenti nella base canonica un prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^3$ tale che

   - $\sigma(\varphi) = (2, 1, 0)$;
   - $\sigma(\varphi_{|W}) = (1, 1, 0)$, dove $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x + y + z = 0\}$;
   - Il vettore e_1 sia isotropo per φ.

5. Usando soltanto gli assiomi di determinante, e il comportamento dello stesso rispetto all'algoritmo di Gauss, calcolare il determinante di

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$