ESERCIZI TUTORATO 27/03/2025

1

Mostriamo che F è sottospazio di $End(\mathbb{R}^3)$.

- $0 \in F$;
- $(f+g)^* = g^* + f^* = f^* + g^* = f+g$
- $(f+g)(U) \subseteq f(U) + g(U) = W$; analoga per W.
- $(\lambda f)^* = \lambda(f^*)$
- $\lambda f(U) \subseteq \lambda W = W$.

Inoltre,

$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Calcoliamo $\dim F$; le due condizioni $f(U) \subseteq W$ e $f(W) \subseteq U$, posta A una matrice di incognite simmetrica,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} - 2a_{12} + a_{22} = 0 \\ a_{11} - a_{13} + a_{12} - a_{23} = 0 \\ a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{13} + a_{23} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

Adesso, basta osservare che le 4 equazioni sono indipendenti, e dunque che
$\dim F = 6 - 4 = 2$.

2

<u>Soluzione</u> Lavoriamo con il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$. Troviamo una base di autovettori per A, e poi la ortonormalizziamo usando Gram-Schmidt.

Si ha $\begin{cases} \text{tr} A = 16 \\ \det A = 39 \end{cases} \Rightarrow \text{Sp} A = \{3, 13\}$. Allora, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$.

$V_A(3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \text{span}(\underbrace{3e_1 - e_2}_{V_1})$; $V_A(13) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{span}(\underbrace{e_1 + 3e_2}_{V_2})$

Ora, sia φ il prodotto scalare standard; osserviamo che $\varphi(V_1, V_2) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$,

$$\begin{cases} \varphi(V_1, V_1) = 10 \Rightarrow w_1 = \frac{V_1}{\sqrt{10}} \text{ ha norma } 1. \\ \varphi(V_2, V_2) = 10 \Rightarrow w_2 = \frac{V_2}{\sqrt{10}} \text{ ha norma } 1. \end{cases}$$

Allora, il cambio di base $\mathcal{C} \to \{w_1, w_2\}$ è la matrice richiesta,

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$

<u>Soluzione</u> a) Prendiamo $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$, e scrivendolo come $J = \lambda I + \lambda J_0$,

con $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Allora, $J^k = (\lambda I + J_0)^k = \lambda^k I + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J_0^i$, dove

$J_0^i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \to \text{posizione } (1,i) & \\ & \ddots & & \ddots \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Questo si può facilmente verificare fissando

la taglia n, e facendo induzione forte su k.

b) Chiaramente J^k ha un solo autovalore, ed è λ^k. Inoltre, se $\lambda \neq 0$, è facile vedere che gli elementi sulla sovradiagonale non sono nulli.

Questo significa che le colonne di J^k formano una base ciclica di $\mathbb{C}^n$, e dunque $\mu_{J^k}(t) = (t-\lambda)^n$. Allora, dato che le molteplicità nel polinomio minimo rappresenta le massime taglie dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore, la forma di Jordan di J^k è $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$.

$\boxed{4}$

Se $A \sim_{\mathbb{R}} B$, allora banalmente $A \sim_{\mathbb{C}} B$.

Viceversa, supponiamo che esiste $M \in GL(n,\mathbb{C})$ t.c. $M^{-1}AM = B$

Questo è equivalente a chiedere $AM = MB$.

Vogliamo dunque trovare $N \in GL(n,\mathbb{R})$ tale che $AN = NB$.

Se $M = M_1 + iM_2$, con $M_j \in M(n,\mathbb{R})$. Allora, $AM_j = M_jB$ $j=1,2$.

In particolare, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo $N_\alpha = M_1 + \alpha M_2$.

Da quanto scritto prima segue che $AN_\alpha = N_\alpha B \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Se dunque troviamo un α reale tale che $\det(N_\alpha) \neq 0$, abbiamo finito.
Consideriamo il polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$, definito da
$p(x) = \det(M_1 + x M_2)$. p non è identicamente nullo, dato che $p(i) = \det M \neq 0$,

e dunque ha un numero finito di radici. Questo ci garantisce che esiste un numero reale α tale che $\det(M_1 + \alpha M_2) \neq 0$. Questo conclude la dimostrazione.

$\boxed{5}$

Soluzione $(P^*)^2 = (P^2)^* = P^*$ per definizione di aggiunto.

Osserviamo anche che se $P^2 = P$, $V = \mathrm{Im} P \oplus \mathrm{Ker} P$ (perché?) e $P_{|\mathrm{Im}P} = id$.

a → b Supponiamo che P sia una proiezione ortogonale su $W = \mathrm{Im} P$. ($\mathrm{Ker}P = \mathrm{Im}P^\perp$)
Consideriamo $v_1, v_2 \in V$, e scriviamo le loro decomposizioni $\begin{cases} v_1 = w_1 + u_1 \\ v_2 = w_2 + u_2 \end{cases}$,

con $w_i \in \mathrm{Im} P$, $u_i \in \mathrm{Ker} P$. Allora,

$$\varphi(P(v_1), v_2) = \varphi(P(w_1 + u_1), w_2 + u_2) = \varphi(P(w_1) + P(u_1), w_2 + u_2) =$$

$$= \varphi(w_1, w_2 + u_2) = \varphi(w_1, w_2)$$

$$\varphi(v_1, P(v_2)) = \varphi(w_1 + u_1, P(w_2 + u_2)) = \varphi(w_1 + u_1, P(w_2) + P(u_2)) =$$

$$= \varphi(w_1 + u_1, w_2) = \varphi(w_1, w_2).$$ Segue che $P = P^*$.

b → a Dato che $\mathrm{Ker} P^* = (\mathrm{Im} P)^\perp$, $\mathrm{Ker} P = \mathrm{Ker} P^* = (\mathrm{Im} P)^\perp$.

b → c OVVIO

c → b Mostriamo che $\mathrm{Ker} P = \mathrm{Ker} P^*$, e $\mathrm{Im} P = \mathrm{Im} P^*$.
Dato $v \in V$, $\varphi(Pv, Pv) = \varphi(v, P^* P(v)) = \varphi(v, PP^*(v)) = \varphi(P^* v, P^* v)$.

Dato che il prodotto scalare è definito positivo, $Pv = \underline{0} \Leftrightarrow P^* v = \underline{0}$.
Dato che $\mathrm{Ker} P^* = (\mathrm{Im} P)^\perp$, $\mathrm{Im} P = (\mathrm{Ker} P^*)^\perp = (\mathrm{Ker} P)^\perp = \mathrm{Im} P^*$.