ESERCIZI TUTORATO 16/01/2025

$\boxed{1}$

Sia $A \in Z(GL(n,\mathbb{R}))$. Allora, per ogni $B \in GL(n,\mathbb{R})$ vale $AB = BA$.
Questa condizione è equivalente ad $A = BAB^{-1}$ $\forall B \in GL(n,\mathbb{R})$.

Interpretando A come matrice che rappresenta un'applicazione lineare f su una certa base, possiamo ridurre il problema a cercare le applicazioni lineari che sono rappresentate dalla stessa matrice in ogni base, dato che coniugare per una matrice invertibile rappresenta un cambio di base.

Siano dunque $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, tali che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

Consideriamo la famiglia di basi $\mathcal{B}_j = \{v_1, \dots, -v_j, \dots, v_n\}$. Qui, la matrice che rappresenta la f è uguale ad A, ma con j-esima riga e j-esima colonna cambiate di segno.
Osserviamo anche che $(M^{\mathcal{B}_j}_{\mathcal{B}_j}(f))_{jj} = A_{jj}$, dato che "cambia segno due volte".
Dato che ogni elemento fuori dalla diagonale deve essere uguale al proprio opposto, A deve essere diagonale.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli elementi sulla diagonale di A. Considero, per $i \neq j$, le basi:

$\mathcal{B}_{ij} = \{v_1, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-esimo} \\ \text{posto}}}{v_j}, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ j\text{-esimo} \\ \text{posto}}}{v_i}, \dots, v_n\}$; qui, $M^{\mathcal{B}_{ij}}_{\mathcal{B}_{ij}}(f)$ appare come $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_i & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Dato che questa deve essere uguale ad A, si ha $\lambda_j = \lambda_i$ $\forall j \neq i$, da cui segue che A deve essere un multiplo non nullo dell'identità.

Dato che $\{\lambda I \mid \lambda \neq 0\} \subseteq Z(GL(n,\mathbb{R}))$ (verificatelo!), segue che

$$Z(GL(n,\mathbb{R})) = \{\lambda I \mid \lambda \neq 0\}.$$

$\boxed{2}$

Una tale applicazione non esiste. Dimostriamolo.

Sia $X = \{M \in M(3,\mathbb{R}) \mid \operatorname{rk} M = 2\}$. Mostriamo che le matrici elementari E_{ij} sono combinazione lineare di elementi di X.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{hk}) + \frac{1}{2}(E_{ij} - E_{hk}) \; ; \; \text{presi } \begin{cases} h \in \{1,2,3\} \setminus \{i\} \\ k \in \{1,2,3\} \setminus \{j\} \end{cases},$$

è immediato verificare che $E_{ij} + E_{hk}$ e $E_{ij} - E_{hk}$ hanno rango 2.

Allora, $\operatorname{span}(X) = M(3,\mathbb{R})$; dato che $\dim(\operatorname{Im} f) \leq 8$, e che $\dim(M(3,\mathbb{R})) = 9$, $\operatorname{Im} f$ non può contenere X, dato che essendo uno spazio vettoriale, conterrebbe anche $\operatorname{span} X$.

$\boxed{3}$

Mostriamo entrambi i contenimenti.

<u>$\operatorname{span}(e_1) \subseteq \operatorname{Ker}(L_A)$</u> : se fosse $e_1 \notin \operatorname{Ker}(L_A)$, dovremmo avere $Ae_1 \neq \underline{0}$.

Tuttavia, $Ae_1 = A(A^2 e_2) = A^2(Ae_2) = \lambda e_1$ per un certo $\lambda \neq 0$.
Questo segue dal fatto che applicando A^2, le componenti di Ae_2 lungo e_1 ed e_3 vengono mandate a $\underline{0}$, mentre la componente lungo e_2 viene mandata in e_1.
Ora, $A(\lambda e_1) = \lambda(Ae_1) = \lambda^2 e_1$, e $A(\lambda e_1) = A^2 e_1 = \underline{0}$, da cui $\lambda = 0$, assurdo.

<u>$\operatorname{Ker}(L_A) \subseteq \operatorname{span}(e_1)$</u> : Osserviamo innanzitutto che $e_2 \notin \operatorname{Ker}(L_A)$, e che $\operatorname{span}(e_1) \subseteq \operatorname{Ker} L_A \subseteq \operatorname{Ker}(L_A^2) = \operatorname{span}(e_1, e_3)$. Mostriamo che $e_3 \notin \operatorname{Ker}(L_A)$.
Se fosse $e_3 \in \operatorname{Ker}(L_A)$, A dovrebbe essere della forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, da cui $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & ab & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & bc & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow A = \underline{0}$, assurdo.

$\boxed{4}$

Osserviamo innanzitutto che $\mathbb{C}$ ha una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 2. Una possibile base è $\{1, i\}$.

a) Questo è una semplice verifica; segue dal fatto che $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

b) Le mappe $\mathbb{C}$-lineari da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ formano uno spazio vettoriale complesso di dimensione 1. C'è un isomorfismo tra $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ e $\mathbb{C}$, dato da

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(f_w : z \longmapsto wz) \longmapsto w$$

Scrivendo $w = \rho e^{i\vartheta}$ per certi $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, si verifica facilmente che questa sono una composizione di una rotazione di angolo ϑ e di un'omotetia di fattore ρ.

Possiamo considerare $f(z) = \bar{z}$, che agisce invece come una riflessione. Questa chiaramente non è $\mathbb{C}$-lineare.

c) Sia f come da ipotesi, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.

Si ha che $f((\alpha + i\beta)z) = f(\alpha z + i\beta z) = f(\alpha z) + f(i\beta z) = \alpha f(z) + i\beta f(z) =$

$= (\alpha + i\beta) f(z)$.

Osserviamo che la disuguaglianza in verde è conseguenza della $\mathbb{R}$-linearità, quella in blu è conseguenza di $\mathbb{R}$-linearità e omogeneità rispetto a i.

Soluzione alternativa Si potrebbe osservare che dalla caratterizzazione del punto b), le mappe $\mathbb{C}$-lineari sono rappresentate nella base $\{1, i\}$ da matrici della forma $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, w & -\mathrm{Im}\, w \\ \mathrm{Im}\, w & \mathrm{Re}\, w \end{pmatrix}$; pertanto, le mappe $\mathbb{R}$-lineari che sono anche $\mathbb{C}$-lineari sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice della forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Vi lascio da verificare che le due condizioni aggiuntive sono equivalenti.

$\boxed{5}$

a)

Troviamo innanzitutto l'immagine secondo f_A delle matrici elementari, che sappiamo formare una base.

$$f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_A(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$f_A(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_A(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_A(E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$f_A(E_{31}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_A(E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_A(E_{33}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora, la matrice che rappresenta f_A nella base delle matrici elementari è una matrice a blocchi 3×3, fatta nel seguente modo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I & 2I \\ 2I & 2I & -3I \\ -2I & -3I & I \end{pmatrix}$$

Facendo delle mosse di Gauss, si trova che $\mathrm{rk}\, B = 6$, da cui $\dim(\mathrm{Ker}\, f_A) = 3$.
Adesso possiamo procedere in due modi:

- Fissiamo un isomorfismo tra $M(3,\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^9$, facciamo mosse di Gauss e torniamo indietro per trovare 3 matrici di $M(3,\mathbb{R})$.

- Osserviamo che la condizione $AM = 0$ è equivalente a chiedere che $\mathrm{Im}\, M \subseteq \mathrm{Ker}\, A$. Dato che $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (verificatelo!), basta scegliere tre matrici indipendenti con immagine $\mathrm{span}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ formano la base cercata.

b) Consideriamo l'unico isomorfismo $M(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^9$ che manda la base $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$ nella base canonica preservando l'ordine di apparizione. È facile vedere che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A)$ funziona.