ESERCIZI TUTORATO 13/03/2025

$\boxed{1}$

Consideriamo $V = M(2,\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare $\varphi(X,Y) = tr(X^t Y)$.
Sia $f \in End(V)$ definito da $f(X) = X - X^t$.

a) f è φ-autoaggiunto?

b) f è una φ-isometria?

c) Scrivere la matrice di f rispetto ad una base ortonormale di V, e confrontare il risultato con le risposte date in a) e b).

<u>Soluzione</u>

a) Osserviamo che $\cdot\ \varphi(f(X),Y) = \varphi(X - X^t, Y) = \varphi(X,Y) - \varphi(X^t, Y) =$

$$= tr(X^t Y) - tr(XY);$$

$\cdot\ \varphi(X, f(Y)) = \varphi(X, Y - Y^t) = \varphi(X,Y) - \varphi(X, Y^t) = tr(X^t Y) - tr(X^t Y^t);$

dato che $X^t Y^t = (YX)^t$, $tr(A^t) = trA$, e $tr(AB) = tr(BA)$,

$tr(X^t Y^t) = tr((YX)^t) = tr(YX) = tr(XY) \implies \varphi(f(X),Y) = \varphi(X, f(Y))$,
quindi f è φ-autoaggiunto.

b) Un'isometria è invertibile, e $Ker f = S(2,\mathbb{R}) \neq \{\underline{0}\}$, da cui $f \notin O(V,\varphi)$.

c) Considero la base $\mathcal{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$; è facile vedere che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale.

Ora, gli ultimi tre vettori della base sono una base di $S(2,\mathbb{R})$, e

$$f(E_{12} - E_{21}) = (E_{12} - E_{21}) - (E_{12} - E_{21})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= 2(E_{12} - E_{21})$. Allora, $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che a) $M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica ($\Leftrightarrow f$ è φ-autoaggiunto), e

b) Non è un'isometria, coerentemente con quanto detto prima.

$\boxed{2}$

Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Esprimere A^5 come combinazione lineare di A^2, A e I.

<u>Soluzione</u>

Calcoliamo innanzitutto $p_A(t)$. $p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 1 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t) \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} =$

$= (2-t)((3-t)^2 - 1) = (2-t)(9+t^2-6t-1) = (2-t)(t^2-6t+8) = (2-t)^2(4-t)$

Trovato $p_A(t)$, troviamo $\mu_A(t)$. Sappiamo che $(2-t)(4-t) \mid \mu_A(t) \mid (2-t)^2(4-t)$, quindi se mostriamo che $A^2-6A+8I \neq 0$, seguirà che $\mu_A(t) = -p_A(t)$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & 16 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, da cui $A^2-6A+8I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, da cui

$\mu_A(t) = -p_A(t) = t^3 - 8t^2 + 20t - 16$.

Allora, $A^3 = 8A^2 - 20A + 16I \implies A^5 = 8A^4 - 20A^3 + 16A^2 =$

$= 8A(8A^2 - 20A + 16I) - 20(8A^2 - 20A + 16I) + 16A^2 =$

$= 64A^3 - 160A^2 + 128A - 160A^2 + 400A - 320I + 16A^2 =$

$= 64(8A^2 - 20A + 16I) - 160A^2 + 128A - 160A^2 + 400A - 320I + 16A^2 =$

$= 512A^2 - 1280A + 1024I - 160A^2 + 128A - 160A^2 + 400A - 320I + 16A^2 = 208A^2 - 752A + 704I$.

$\boxed{3}$

Trovare, se esiste, una matrice $A \in M(4, \mathbb{R})$ tale che $\mu_A(t) = t^3 - 2t^2 + t$.

<u>Soluzione</u>

Scomponendo $\mu_A(t)$, troviamo $\mu_A(t) = t(t-1)^2$. Dunque, gli autovalori dovranno essere 0 e 1. Inoltre, vogliamo che $\mu_A(A) = 0$, e $A(A-I) \neq \underline{0}$.
Per soddisfare queste richieste, scegliamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo subito che $\mu_A(A)=0$, e

che $A^2=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, da cui $A(A-I)\neq \underline{0}$, come voluto.

$\boxed{4}$

Data $A=\begin{pmatrix}1-i & i\\ 2+i & i-1\end{pmatrix}$, consideriamo $f_A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto Ax$.

a) Mostrare che $f_A \notin U(\mathbb{C}^2)$.

b) Trovare un prodotto hermitiano definito positivo rispetto al quale f_A sia unitario. Esplicitare la matrice di φ rispetto alla base canonica.

<u>Soluzione</u> a) $f_A \in U(\mathbb{C}^2)$ se e solo se $A\in U(2)$, cioè se e solo se $A^{-1}=A^H$.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}i-1 & -i\\ -2-i & 1-i\end{pmatrix}$, mentre $A^H=\begin{pmatrix}1+i & 2-i\\ -i & -1-i\end{pmatrix}$; queste due matrici sono diverse,

quindi $f_A\notin U(\mathbb{C}^2)$.

b) f_A è unitario rispetto ad un prodotto hermitiano φ se $\varphi(f_A(x),f_A(y))=\varphi(x,y)$ $\forall x,y$. Equivalentemente, possiamo richiedere che f_A sia un operatore normale con autovalori unitari. Equivalentemente (TSH) possiamo richiedere che f_A ammette una base φ-ortonormale di autovettori, e $\mathrm{sp}\, f_A \subseteq \{\|z\|=1\}$.

Osserviamo che $\mathrm{sp}A=\{-i,i\}$, e che $\begin{cases} V_A(i)=\mathrm{span}((2-i)e_1+5e_2)=\mathrm{span}(v_1)\\ V_A(-i)=\mathrm{span}(-ie_1+e_2)=\mathrm{span}(v_2)\end{cases}$

Ci basta dunque imporre $\varphi(v_1,v_1)=\varphi(v_2,v_2)=1$, $\varphi(v_1,v_2)=0$.

Allora, un prodotto hermitiano che funziona è quello rappresentato nella base $\{v_1,v_2\}$ dalla matrice $M_{\{v_1,v_2\}}(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. A questo punto, basta applicare una similitudine (hermitiana) con la matrice che diagonalizza A, e cioè

$P: \mathcal{C}\to\{v_1,v_2\}$, $P=\begin{pmatrix}2-i & -i\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ $\quad P^HAP=\begin{pmatrix}30 & 6-2i\\ 6+2i & 2\end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e sia $f \in End(V)$ tale che $f^2 = id$.

a) Esiste un prodotto scalare definito positivo rispetto al quale f è autoaggiunto?

b) È vero che f è autoaggiunto rispetto a ogni prodotto scalare definito positivo?

Soluzione a) Dalla condizione $f^2 = id$, segue che f è diagonalizzabile (perché?), con autovalori 1 e -1. Presa una base di autovettori $\{v_1, \dots, v_k\}$, considero il prodotto scalare $\varphi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. Questo è definito positivo, e la matrice di f in questa base è diagonale, dunque in particolare simmetrica. Allora, f è autoaggiunta rispetto a φ.

b) No. Ricordiamo che se f è autoaggiunta rispetto ad un prodotto scalare, i suoi autospazi sono ortogonali. In particolare, se $f \neq id$ e $f \neq -id$, cioè se gli autospazi sono due, si può trovare un prodotto scalare definito positivo per cui V_1 e V_{-1} non sono ortogonali. Costruiamo un controesempio esplicito.

Sia $V = \mathbb{R}^2$, e sia f la riflessione rispetto all'asse x. Allora, $\begin{cases} V_1 = \text{span}\, e_1, \\ V_{-1} = \text{span}\, e_2, \end{cases}$.

Consideriamo ψ il prodotto scalare dato nella base canonica dalla matrice

$M_e(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Questo è definito positivo, e gli autospazi di f non sono ortogonali tra loro, da cui segue che f non è ψ-autoaggiunta.
