ESERCIZI TUTORATO 13/02/2025

1

Lo mostriamo per induzione su k.

$\underline{k=1}$ Se $k=1$, $A=(-a_0)$, $A-tI=-a_0-t$, $\det(A-tI)=-(a_0+t)$.

$\underline{k>1}$ Supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$. Allora,

$$A-tI=\begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & & & & \\ 0 & & \boxed{A'-tI_{k-1}} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

; usando lo sviluppo di Laplace sulla prima riga, si trova che

$$\det(A-tI)=t\det(A'-tI_{k-1})+ \\ +(-1)^k a_0 \det B,$$

dove B è la matrice triangolare superiore, con -1 sulla diagonale e t sulla sovradiagonale, di taglia $k-1$.

In particolare, $\det B=(-1)^{k-1}$, e $\det(A-tI)=t\det(A'-tI\ )+(-1)^{2k-1}a_0=$

$=t(-1)^{k-1}(t^{k-1}+a_{k-1}t^{k-2}+\ldots+a_1)+a_0=(-1)^k(t^k+a_{k-1}t^{k-1}+\ldots+a_1t+a_0)$.

2

Sappiamo che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico; è anche vero che un polinomio è determinato a meno di invertibili dall'insieme delle sue radici, contate con molteplicità. Osserviamo che $\det(U-I)=p_U(1)$.

Troviamo dunque gli autovalori di U. Osserviamo che le colonne sono tutte dipendenti, dunque U ha rango 1, e $\dim(\operatorname{Ker} U)=n-1=\dim(V_0)$

(V_0 è proprio $\operatorname{Ker}(U)$). Allora, $ma(0)\geq n-1$. Osserviamo anche che $e_1+\ldots+e_n$ è un autovettore relativo all'autovalore n, da cui $\begin{cases} ma(0)=n-1 \\ ma(n)=1 \end{cases}$.

Allora, $p_U(t)=(-t)^{n-1}(n-t)$, che valutato in 1 diventa $p_U(1)=(-1)^{n-1}(n-1)$.

$\boxed{3}$

Sappiamo che $M(n,\mathbb{R}) = S(n,\mathbb{R}) \oplus A(n,\mathbb{R})$, dove $\begin{cases} S(n,\mathbb{R}) = \{\text{mat. symm.}\} \\ A(n,\mathbb{R}) = \{\text{mat. antisymm.}\}. \end{cases}$

Sappiamo anche che $\begin{cases} f(S) = S & \forall S \in S(n,\mathbb{R}) \\ f(A) = -A & \forall A \in A(n,\mathbb{R}), \end{cases}$ da cui

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n^2-k} \end{array} \right), \text{ dove } k = \dim S(n,\mathbb{R}).$$

Un semplice calcolo sulle entrate libere di una matrice simmetrica mostra che $k = \frac{n(n+1)}{2}$, da cui $n^2-k = \frac{n(n-1)}{2}$. Allora,

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_{\frac{n(n+1)}{2}} & 0 \\ \hline 0 & -I_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array} \right).$$

$\boxed{4}$

a) Osserviamo innanzitutto che A è triangolare a blocchi. Questo implica che il polinomio caratteristico di A è il prodotto dei polinomi caratteristici dei blocchi sulla diagonale (mostratelo!).

In particolare, $\mathrm{Sp}A$ sarà l'unione dei due spettri. Inoltre, detti

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = -A_1$; sappiamo che se $\lambda \in \mathrm{Sp} f$,

$-\lambda \in \mathrm{Sp}(-f)$, quindi gli autovalori di A_1 determinano univocamente quelli di A.

$$\det(A_1 - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} = -(t+1)(1-t) + 2 = t^2 - 1 + 2 = t^2 + 1.$$

Allora, gli autovalori di A_1 sono $\pm i$, da cui $\mathrm{Sp}A = \{i, -i\}$.

b) Per trovare gli autospazi, calcoliamo basi dei nuclei delle seguenti matrici:

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1-i & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1-i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \text{ ha rango } 2, \text{ e } \begin{cases} A^{(2)} - (1+i)A^{(1)} = 0 \\ (1+i)A^{(1)} + (i-1)A^{(3)} + A^{(4)} = 0, \end{cases}$$

da cui $V_i = \mathrm{Ker}(A - iI) = \mathrm{span}(-(1+i)e_1 + e_2, (1+i)e_1 + (i-1)e_3 + e_4)$.

$$(A+iI)=\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1-i & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1-i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}$$ ha rango 2, e $\begin{cases} A^{(2)}-(i-1)A^{(1)}=0 \\ (i-1)A \;\; -(1+i)A^{(3)}+A^{(4)}=0 \end{cases}$,

da cui $V_{-i}=\mathrm{Ker}(A+iI)=\mathrm{span}((i-1)e_1+e_2,\,(1-i)e_1-(i+1)e_3+e_4)$.

c) Per quanto detto al punto b), A è diagonalizzabile, e dunque ammette una base di autovettori.

$\boxed{5}$

a) $\Rightarrow$: Se $M\sim N$, esiste $P\in GL(n,\mathbb{C})$ tc. $N=P^{-1}MP$. Allora,

$$N-\alpha I = P^{-1}MP-\alpha(P^{-1}IP)=P^{-1}(M-\alpha I)P. \qquad P^{-1}IP=I$$

$\Leftarrow$: ovvio.

b) Osserviamo che se $M\sim N$, $M^k\sim N^k$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Infatti, se $N=P^{-1}MP$, $N^k=(P^{-1}MP)^k=P^{-1}M^kP$.

Siano $\alpha\in\mathbb{C}$ fissato, $A'=A-\alpha I$, $B'=B-\alpha I$. $A'=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$B'=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Si osserva che $B'^2=\underline{0}$, mentre $A'^2\neq\underline{0}$, dunque $A\nsim B$.

c) Segue da quanto detto.