Esercizi di Algebra Lineare, corso A

Enrico Berni

13/02/2025

Provate a svolgere i seguenti esercizi in maniera autonoma, eventualmente confrontandovi con dei compagni. Le soluzioni saranno discusse durante il tutorato di giovedì 13 febbraio.

1. Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{k-1}t^{k-1} + t^k \in \mathbb{K}[t]$ un polinomio monico. Definiamo la matrice compagna di p come la matrice $A_p \in \mathfrak{M}(k, \mathbb{K})$,
$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}.$$
Mostrare che il polinomio caratteristico di A_p è uguale a $p(t)$.
Suggerimento: Usate il principio di induzione su k.

2. Sia $U \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ la matrice quadrata di taglia n le cui entrate sono tutte 1. Calcolare il polinomio caratteristico $p_U(t)$.

3. Dato che il determinante è un invariante per similitudine, possiamo definire il determinante di un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ come il determinante di una sua rappresentazione in base.
Sia $V = \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$; calcolare il determinante dell'endomorfismo $f(A) = A^t$.
Suggerimento: Usate una base comoda (e già nota!) per lavorare con f.

4. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Sia $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ l'endomorfismo di $\mathbb{C}^4$ dato da $L_A(x) = Ax$.

(a) Calcolare gli autovalori di L_A.

(b) Determinare una base di ogni autospazio di L_A.

(c) È vero che unendo le basi trovate si trova una base di $\mathbb{C}^4$?

5. (a) Mostrare che due matrici quadrate A e $B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$ sono simili se e solo se lo sono $(A - \alpha I)$ e $(B - \alpha I)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

   (b) Dedurre che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, le matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

   non sono simili.

   (c) Dedurre che polinomio caratteristico e molteplicità geometriche non formano un insieme completo di invarianti per similitudine; cioè, esistono endomorfismi non simili con stesso polinomio caratteristico e stesse molteplicità geometriche.