ESERCIZI TUTORATO 06/02/2025

$\boxed{1}$

a) Osserviamo innanzitutto che la matrice data ha rango 2, e che

$$\begin{cases} 2A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(4)} = \underline{0} \\ A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)} = \underline{0} \end{cases}$$

. Questo implica che $\operatorname{Rad}\varphi = \operatorname{Ker} A =$
$= \operatorname{span}(2e_1 - e_2 - e_4, e_1 + e_2 - e_3)$.

Osserviamo anche che $\varphi_{|\operatorname{span} e_1} > 0$, $\varphi_{|\operatorname{span}(e_2)} < 0$. Allora, $\sigma(\varphi) = (1,1,2)$.

b) Ricordiamo che una decomposizione della forma $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ è possibile se e solo se $\varphi_{|W}$ è non degenere. Tuttavia, in generale vale che se $W \cap \operatorname{Rad}\varphi = \{\underline{0}\}$, $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$. Cerchiamo dunque un sottospazio che non intersechi il radicale. La dimensione massima sarà 2. Sappiamo che $\operatorname{Rad}\varphi = \operatorname{span}(2e_1 - e_2 - e_4, e_1 + e_2 - e_3)$; come complementare scegliamo $W = \operatorname{span}(e_1, e_2)$. Osserviamo che $\varphi_{|W}$ è rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che ha rango 2, e dunque $\operatorname{Rad}\varphi_{|W} = \{\underline{0}\}$, come voluto.

<u>Oss</u> Non è detto che, se $W \cap \operatorname{Rad}\varphi = \{\underline{0}\}$, $\operatorname{Rad}\varphi_{|W} = \{0\}$. Preso ϕ prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$, rappresentato dalla matrice $M_e(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e $W = \operatorname{span}(e_1)$, si ha $W^\perp = \operatorname{span}(e_1)$, da cui $\operatorname{Rad}\varphi_{|W} = W \cap W^\perp = \operatorname{span}(e_1) = W \neq \{\underline{0}\}$.
W e $W^\perp$ non sono dunque in somma diretta, anche se ϕ è globalmente non degenere.

$\boxed{2}$

Troviamo il comportamento di R sulla base duale $\mathcal{B}^*$, e scriviamone l'immagine nella base $\mathcal{B}$.

Sappiamo che
$$\begin{cases} 1 = x^*(x) = \varphi(R(x^*), x) = R(x^*)(1) + 2R(x^*)(2) \\ 0 = x^*(x+1) = \varphi(R(x^*), x+1) = R(x^*)(0) + 2R(x^*)(1) + 3R(x^*)(2) \\ 0 = x^*(x^2+x) = \varphi(R(x^*), x^2+x) = 2R(x^*)(1) + 6R(x^*)(2), \end{cases}$$

da cui troviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} R(x^*)(1) + 2R(x^*)(2) = 1 \\ R(x^*)(0) + 2R(x^*)(1) + 3R(x^*)(2) = 0 \\ 2R(x^*)(1) + 6R(x^*)(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(x^*)(0) = 3 \\ R(x^*)(1) = 3 \\ R(x^*)(2) = -1 \end{cases}$$

Ricordiamo che $R(x^*)$ è un polinomio di grado ≤ 2, ed è dunque univocamente determinato da un'interpolazione su tre punti.

Scriviamo quindi: $R(x^*) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, troviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a_0 = -3 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = -1 \end{cases}, \text{ con soluzione } \begin{cases} a_0 = -3 \\ a_1 = 11 \\ a_2 = -5 \end{cases}; \text{ segue che}$$

$$R(x^*) = -5x^2 + 11x - 3.$$

Ripetendo lo stesso procedimento per $(x+1)^*$ e $(x^2+x)^*$, troviamo

$$R((x+1)^*) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1, \quad R((x^2+x)^*) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Scriviamo nella base $\mathcal{B}$ i polinomi trovati:

- $R(x^*) = 19V_1 - 3V_2 - 5V_3$
- $R((x+1)^*) = -3V_1 + V_2 + \frac{1}{2}V_3$
- $R((x^2+x)^*) = -\frac{22}{4}V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{7}{4}V_3.$

Allora, la matrice voluta è $\begin{pmatrix} 19 & -3 & -22/4 \\ -3 & 1 & 1/2 \\ -5 & 1/2 & 7/4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$

No, non è sempre possibile. Infatti, se $b(v,w) = f(v)g(w)$ $\forall v,w \in V$, consideriamo una base di V, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. La matrice associata a b nella base è

$$B = \begin{pmatrix} f(v_1)g(v_1) & \cdots & f(v_1)g(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(v_n)g(v_1) & \cdots & f(v_n)g(v_n) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 1, dunque se la forma bilineare ha rango almeno 2 non può essere rappresentata così.

$\boxed{4}$

$\Rightarrow$: ovvio.

$\Leftarrow$: Sia $\mathcal{B}$ una base di V, e $\mathcal{B}^*$ la base duale di V^*.

Sia a_{ij} la j-esima coordinata di f_i rispetto a $\mathcal{B}^*$; la matrice $A = (a_{ij})$ ha nucleo isomorfo a $\bigcap \operatorname{Ker} f_i$ tramite il passaggio in base di cui sopra.

Sia ora (b_j) il vettore delle coordinate di g rispetto a $\mathcal{B}^*$; la condizione $\bigcap \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} g$ implica che se aggiungiamo al sistema $AX = \underline{0}$ l'equazione relativa a g, l'insieme delle soluzioni non cambia. Questo è equivalente a dire che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\left(\frac{A}{b}\right)$, che per il teorema di Rouché-Capelli è equivalente a dire che la riga b sia linearmente dipendente dalle altre, come voluto.

$\boxed{5}$

a) Se φ è definito, è banalmente anisotropo.

Sia dunque φ un prodotto scalare non degenere e non definito. Mostriamo che φ ammette dei vettori isotropi. Per il teorema di Sylvester, esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$, tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right)$. Allora,

$$\varphi(v_1 + v_{k+1}, v_1 + v_{k+1}) = \varphi(v_1, v_1) + 2\varphi(v_1, v_{k+1}) + \varphi(v_{k+1}, v_{k+1}) = 1 - 1 = 0,$$ come voluto.

b) Se $\dim V = 1$, e φ è non degenere, considero un generatore v di V. $\varphi(v,v) \neq 0$, dunque per linearità della forma quadratica segue che

$\varphi(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \varphi(v,v) \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$, cioè φ è anisotropo.

Viceversa, sia V di dimensione $n \geq 2$, e sia φ un prodotto scalare non degenere. Per il teorema di Sylvester, esiste una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$.

Allora, $$\varphi(v_1 + iv_2, v_1 + iv_2) = \varphi(v_1, v_1) + 2i\varphi(v_1, v_2) + i^2 \varphi(v_2, v_2) =$$
$$= \varphi(v_1, v_1) - \varphi(v_2, v_2) = 1 - 1 = 0,$$ come voluto.