ESERCIZI TUTORATO 16/01/2025

$\boxed{1}$

<u>Soluzione</u> Facciamo qualche osservazione preliminare.

1) Se μ è autovalore per A, lo è anche $\bar{\mu}$, e hanno la stessa molteplicità algebrica.
Questo è dovuto al fatto che p_A ha coefficienti reali.

2) Se λ è un autovalore reale per A, consideriamo l'autospazio generalizzato $V_\lambda' \subseteq \mathbb{C}^n$.
Allora, una base di Jordan per V_λ' si trova prendendo basi opportune nella successione di sottospazi $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \subseteq \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 \subseteq \ldots$

Questi hanno stessa dimensione come sottospazi reali o complessi, per cui possiamo scegliere una base di Jordan fatta da vettori con entrate reali.

3) Sia μ un autovalore non reale di A, e sia $\{z_1, \ldots, z_k\}$ una base di Jordan per V_μ'. Allora, $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k\}$ è base di Jordan per $V_{\bar{\mu}}'$.
Infatti, dato che $\operatorname{Ker}(A-\bar{\mu}I)^j = \overline{\operatorname{Ker}(A-\mu I)^j}$ $\forall j$, i vettori $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k$ sono vettori di $V_{\bar{\mu}}'$. Questi sono anche indipendenti (verificatelo!), e $\dim V_\mu' = \dim V_{\bar{\mu}}'$, dato che μ e $\bar{\mu}$ hanno la stessa molteplicità algebrica. Mostriamo che sono una base di Jordan.

Per ogni $1 \leq i \leq k$, $A z_i = \begin{cases} \mu z_i \\ \mu z_i + z_{i-1} \end{cases}$. Allora, $A \bar{z}_i = \overline{A z_i} = \begin{cases} \overline{\mu z_i} \\ \overline{\mu z_i} + \bar{z}_{i-1} \end{cases}$.

Tutto questo ci dice che i blocchi di Jordan relativi a μ e quelli relativi a $\bar{\mu}$ sono in una corrispondenza biunivoca che conserva la taglia.

4) Se μ è un autovalore non reale di A, esiste una base di $V_\mu' \oplus V_{\bar{\mu}}'$ formata da vettori reali. Sia infatti $\{z_1, \ldots, z_k\}$ base di Jordan di V_μ'. Allora, $\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k\}$ è una base di Jordan per $V_{\bar{\mu}}'$, da cui $\dim(V_\mu' \oplus V_{\bar{\mu}}') = 2k$. Mostriamo che i vettori $\{\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_k, \operatorname{Im} z_k\}$ formano una base di $V_\mu' \oplus V_{\bar{\mu}}'$.

Siano $x_j = \operatorname{Re} z_j$, $y_j = \operatorname{Im} z_j$. Dato che $x_j = \frac{z_j + \bar{z}_j}{2}$, $y_j = \frac{z_j - \bar{z}_j}{2i}$,
i vettori sono un sistema di generatori di $V_\mu' \oplus V_{\bar{\mu}}'$. Essendo esattamente $2k$,

sono una base.

L'ultima cosa che resta da fare è scrivere la matrice $A|_{V'_\mu \oplus V'_{\bar\mu}}$ nella base trovata.

Se $Az_j = \mu z_j$, allora

$$Ax_j = A\left(\frac{z_j+\bar z_j}{2}\right) = \frac{\mu z_j + \bar\mu \bar z_j}{2} = \mathrm{Re}(\mu z_j) = (\mathrm{Re}\,\mu)x_j - (\mathrm{Im}\,\mu)y_j$$

$$Ay_j = A\left(\frac{z_j-\bar z_j}{2}\right) = \frac{\mu z_j - \bar\mu \bar z_j}{2} = \mathrm{Im}(\mu z_j) = (\mathrm{Im}\,\mu)x_j + (\mathrm{Re}\,\mu)y_j.$$

Se invece $Az_j = \mu z_j + z_{j-1}$, allora

$$Ax_j = A\left(\frac{z_j+\bar z_j}{2}\right) = \frac{\mu z_j + z_{j-1} + \bar\mu \bar z_j + \bar z_{j-1}}{2} = \mathrm{Re}(\mu z_j) + \mathrm{Re}(z_{j-1}) =$$

$$= (\mathrm{Re}\,\mu)x_j - (\mathrm{Im}\,\mu)y_j + x_{j-1};$$

$$Ay_j = A\left(\frac{z_j-\bar z_j}{2}\right) = \frac{\mu z_j + z_{j-1} - \bar\mu \bar z_j - \bar z_{j-1}}{2} = \mathrm{Im}(\mu z_j) + \mathrm{Im}(z_{j-1}) =$$

$$= (\mathrm{Im}\,\mu)x_j + (\mathrm{Re}\,\mu)y_j + y_{j-1}.$$

Di conseguenza, se la matrice associata a $A|_{V'_\mu}$ rispetto alla base $\{z_1, \dots, z_k\}$ era della forma $\begin{pmatrix} \mathfrak{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{J}_s \end{pmatrix}$, quella associata ad $A|_{V'_\mu \oplus V'_{\bar\mu}}$ rispetto alla base $\{x_1, y_1, \dots, x_k, y_k\}$ è della forma $\begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{J}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathfrak{J}}_s \end{pmatrix}$, dove $\tilde{\mathfrak{J}}_i = \begin{pmatrix} H_\mu & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & H_\mu \end{pmatrix}$, con I 2×2, e $H_\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\mu & -\mathrm{Im}\,\mu \\ \mathrm{Im}\,\mu & \mathrm{Re}\,\mu \end{pmatrix}$.

Mettendo insieme quanto detto finora con la teoria di Jordan complessa, abbiamo la decomposizione in somma diretta $\mathbb{C}^n = V'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V'_{\lambda_m} \oplus V'_{\mu_1} \oplus \dots \oplus V'_{\mu_k} \oplus V'_{\bar\mu_1} \oplus \dots \oplus V'_{\bar\mu_k}$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Scegliendo basi reali come detto sopra, la A assume la forma voluta.

Assumendo senza perdita di generalità che $\mathrm{Im}(\mu) > 0$, si ha anche l'unicità a meno di permutazione dei blocchi, come nel caso complesso.

2

Gli autovalori λ di A soddisfano $\lambda^6 = 1$, dunque sono radici del polinomio $x^6 - 1$. Dividiamo in casi:

- <u>Gli autovalori sono tutti reali</u>: Le uniche due possibilità per λ_1 e λ_2 sono 1 e -1.

  Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, l'unica forma di Jordan possibile è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dato che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^6 \neq I$.

  Se $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, l'unica forma di Jordan possibile è $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Se $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, l'unica forma di Jordan possibile è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che in generale, se A ha tutti autovalori reali ed ha ordine finito in $GL(n, \mathbb{R})$, allora A è diagonalizzabile.

- <u>A ammette autovalori complessi</u>: Osserviamo subito che gli autovalori sono entrambi complessi, e sono coniugati. Allora, A non può essere simile ad una matrice di Jordan in $M(2, \mathbb{R})$. Troviamo dunque le possibili forme di Jordan reale.

Sia μ l'autovalore con $\operatorname{Im}(\mu) > 0$. La forma di Jordan reale di A sarà $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\mu & -\operatorname{Im}\mu \\ \operatorname{Im}\mu & \operatorname{Re}\mu \end{pmatrix}$. Ci sono due casi: • $\mu = \zeta_6 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{\mu} = \bar{\zeta}_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; in questo caso, la forma di Jordan reale è $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. (Chi è ?)

• $\mu = \zeta_6^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{\mu} = \overline{\zeta_6^2} = \zeta_6^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Allora, la forma di Jordan reale è $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ (Chi è ?).

Facciamo qualche considerazione sul polinomio minimo di A.

Dato che $A^6 - I = \underline{0}$, $\mu_A(t) \mid t^6 - 1 = (t-1)(t+1)(t^2+t+1)(t^2-t+1)$.

Ora, $\deg \mu_A(t) \leq 2$, dunque ci sono 5 possibilità: $\mu_A = t-1$, $\mu_A = t+1$, $\mu_A = (t+1)(t-1)$, $\mu_A = (t^2 - t + 1)$, $\mu_A = (t^2 + t + 1)$, che corrispondono alle forme canoniche trovate. Osserviamo dunque che nel nostro caso, μ_A classifica.